

$$1) d^k(f+g) = d^k f + d^k g, \quad d^k(f+C) = d^k f.$$

$$2) d^k(f \cdot g) = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} d^{k-m} f \cdot d^m g, \quad d^k(C \cdot f) = C d^k f$$

Определение. Точка x_0 называется точкой минимума (максимума) функции $y = f(x)$, если она определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ этой точки и для $\forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$).

Значение $f(x_0)$ в этом случае называется минимумом (максимумом) функции. Точки минимума и максимума называются экстремальными точками, а соответствующие значения функции — экстремумами.

Теорема Ферма. Пусть x_0 — точка минимума, т.е. $f(x) \geq f(x_0)$ для $\forall x \in U(x_0)$.

Тогда для $x > x_0 \Rightarrow \Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0$, $\Delta x = x - x_0 > 0$ и $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$.

Для $x < x_0 \Rightarrow \Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0$, $\Delta x = x - x_0 < 0$ и $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$.

Следовательно, $f'(x_0) = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на этом отрезке и имеет производную во всех точках интервала (a, b) .

Для таких функций кроме теорем Больцано—Коши и Вейерштрасса справедливы еще следующие теоремы

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий $\exists c \in (a, b)$, в которой касательная к графику функций параллельна оси Ox и хорде, соединяющей концы графика на отрезке $[a, b]$.

Теорема Коши. Пусть функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$ и $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$ такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Следующая теорема является прямым следствием теоремы Коши, однако, в силу ее широкого применения имеет специальное название.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$. Тогда в интервале $\exists c \in (a, b)$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Следствие 1. Возьмем $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, тогда при выполнении условий теоремы Лагранжа в отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ будем иметь $\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x$, где $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Это c можно записать в виде $C = x_0 + \theta \cdot \Delta x$, где $\theta \in (0, 1)$.

Тогда приращение функции записывается в виде $\Delta f = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x$ или в общем виде $f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$.

Следствие 2 Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема и $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) = 0$, тогда эта функция постоянна в (a, b) , т. е. $f(x) = c$.

Правило Лопиталя Это правило дает возможность вычислять пределы дифференцируемых функций вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с использованием производных.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ две б.м. или б.б. при $x \rightarrow a$ функции, дифференцируемые в $U(a) \setminus \{a\}$ и пусть $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ в $U(a) \setminus \{a\}$. Тогда, если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и они равны

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные утверждения справедливы для $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow a-$, $x \rightarrow a+$, а также для случая, когда $f'(x), g'(x)$ является б.б.

Пример

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

Пример

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x}) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

3. Функция $y = f(x)^{g(x)}$ типа (1^∞) или (0^0) записывается в виде $y = e^{g(x) \ln f(x)}$, затем вычисляется $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \ln f(x) = A$ типа $(\infty \cdot 0)$.

Если A — число, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^A$.

Если $A = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = (e^{+\infty}) = \infty$.

Если $A = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = (e^{-\infty}) = 0$.